

MESTRADO
ECONOMETRIA APLICADA E PREVISÃO

TRABALHO FINAL DE MESTRADO
DISSERTAÇÃO

MODELAÇÃO DO RISCO DE LONGEVIDADE

HOSANA RACHEL BESSA DE SOUSA

2018

MESTRADO

ECONOMETRIA APLICADA E PREVISÃO

TRABALHO FINAL DE MESTRADO

DISSERTAÇÃO

MODELAÇÃO DO RISCO DE LONGEVIDADE

HOSANA RACHEL BESSA DE SOUSA

ORIENTAÇÃO:
PROFESSORA ALEXANDRA BUGALHO DE MOURA

OUTUBRO - 2018

*À minha mãe, Marcia Bessa,
às minhas irmãs, Heloisa
Rebeca e Sara Ohanna e em
memória do meu pai, Luis
Carlos.*

GLOSSÁRIO

AIC – *Akaike information criterion.*

APC – *Age-Period-Cohort.*

AR – *Autoregressive.*

ARIMA – *Autoregressive Integrated Moving Average.*

BE – *Best Estimate.*

CBD – *Cairns-Blake-Dowd.*

EIOPA – *European Insurance and Occupational Pensions Authority.*

FAC – *Função de Autocorrelação.*

FACP – *Função de Autocorrelação Parcial.*

LC – *Lee Carter.*

MA – *Moving Average.*

RMSE – *Root Mean Square Error.*

SCR – *Solvency Capital Requirement.*

SFCR – *Solvency and Financial Condition Report.*

SVD – *Singular Value Decomposition.*

VaR – *Value at Risk.*

VAR – *Vector Autoregressive.*

VECM – *Vector Error Correction Models.*

RESUMO

A gestão do risco é um dos temas mais discutidos dentro das instituições financeiras do mundo inteiro. O controlo efetivo do risco e sua mensuração é de extrema importância, permitindo a uma empresa se manter estável, prever possíveis perdas e até mesmo reduzir consideravelmente perdas em momentos de instabilidades.

No âmbito das empresas que operam no ramo vida, a longevidade é um dos temas que tem assumido cada vez mais materialidade, quer pelo desenvolvimento da medicina, quer pelo desenvolvimento tecnológico que permite maior acesso ao conhecimento e consciencialização da população sobre prevenção de doenças. Neste sentido, as empresas de seguros de vida têm o desafio de gerir o risco de longevidade, tendo em conta técnicas realistas face à sua população segurada e ao perfil de risco da companhia.

Com o Solvência II, o risco de longevidade passou a ser mandatário de ser calculado para as seguradoras da União Europeia que estão expostas a este risco. A Diretiva 2009/138/CE definiu a fórmula padrão para o seu cálculo. No entanto, a mesma Diretiva permitiu a utilização de modelos internos, por parte das empresas de seguros, mediante aprovação do regulador.

O objetivo deste trabalho é modelar a mortalidade e mensurar o risco de longevidade com dados da população portuguesa, considerando três modelos distintos, nomeadamente os modelos de Lee Carter, *Age-Period-Cohort* e Cairns, Blake and Dowd. Estes resultados serão comparados com o cálculo do risco de longevidade, tendo em conta a metodologia proposta pela fórmula padrão.

Palavras-chave: Risco de longevidade; Solvência II; Modelos internos; Modelos de mortalidade; Fórmula padrão.

ABSTRACT

Risk management is one of the most discussed topics within financial institutions around the world. Effective risk control and its measurement are extremely important, allowing the company to remain stable, predict possible losses and even reduce them significantly in unstable periods.

In the context of life insurance companies, longevity is one of the topics that has assumed more importance, due to the evolution of medicine and the technological development that enables greater access to knowledge and awareness of the population on disease prevention. In this sense, life insurance companies have the challenge of managing the longevity risk applying realistic techniques to their insured population and to the risk profile of the company.

Under Solvency II, the longevity risk, became mandatory for European Union insurers who are exposed to this risk. The Directive 2009/138/EC defines a standard formula for calculating this risk. It also allows the use of internal models by insurance companies, upon approval by the Regulatory Authority.

The goal of this work is to model mortality and measure the longevity risk using data from the Portuguese population. We consider three different mortality models, namely the models of Lee Carter, Age-Period-Cohort and Cairns, Blake and Dowd. In addition, these results are compared with the longevity risk calculation considering the standard formula.

Key words: Longevity Risk; Solvency II; Internal models; Mortality models; Standard formula.

ÍNDICE

Glossário	i
Resumo	ii
Abstract.....	iii
Índice	iv
Índice de Figuras	v
Índice de Tabelas	vi
Agradecimentos	vii
1. Introdução	1
2. Revisão de conceitos e formulações atuariais	3
3. Solvência II e a fórmula padrão.....	8
4. Breve análise descritiva	12
5. Modelos de mortalidade	14
5.1. Revisão de Literatura.....	15
5.2. Modelo de Lee Carter (LC)	17
5.3. Modelo Age Period Cohort (APC)	19
5.4. Cairns-Blake-Dowd (CBD)	19
6. Métodos de previsão	21
6.1. Séries Temporais Univariadas: ARIMA.....	21
6.2. Passeios aleatórios	24
6.3. Séries temporais multivariadas: Modelos VAR e VECM	24
7. Análise dos resultados: Comparações e discussão	27
8. Conclusões.....	34
Referências bibliográficas	36
Anexos.....	40

ÍNDICE DE FIGURAS

FIGURA 1 - ESQUEMA DO REQUISITO DE CAPITAL DE SOLVÊNCIA	10
FIGURA 2 - TAXA DE MORTALIDADE POR IDADE E ANO E ANO DA MORTE	12
FIGURA 3 – TAXA DE MORTALIDADE POR IDADE E ANO DE NASCIMENTO.....	13
FIGURA 4 - ANÁLISE DE $kt1$ e $kt2$ NO PERÍODO DE 1940 A 2015	27
FIGURA 5 - PARÂMETROS ESTIMADOS NO MODELO LC	28
FIGURA 6 - PARÂMETROS ESTIMADOS NO MODELO APC	28
FIGURA 7 - PARÂMETROS ESTIMADOS NO MODELO CBD	28
FIGURA 8 - COMPARAÇÃO ENTRE AS TAXAS DE MORTALIDADE OBSERVADAS E MODELIZADAS	30
FIGURA 9 - COMPARAÇÃO DAS PREVISÕES DA TAXA DE MORTALIDADE.....	31
FIGURA 10 - COMPARAÇÃO DAS TAXAS DE MORTALIDADE EXTRAPOLADAS EM 2015	32
FIGURA 11 - COMPARAÇÃO DA MELHOR ESTIMATIVA DAS PROVISÕES TÉCNICAS (BE) E DO REQUISITO DE CAPITAL PARA O RISCO DE LONGEVIDADE (SCR).....	33

ÍNDICE DE TABELAS

TABELA 1 - FORMULAÇÃO DOS MODELOS DE MORTALIDADE ESTOCÁSTICOS.....	16
TABELA 2 - MODELOS ARIMA SELECIONADOS.....	23
TABELA 3 - ANÁLISE DA BONDADE DO AJUSTAMENTO ATRAVÉS DE CRITÉRIOS DE SELEÇÃO.....	29
TABELA 4 - MODELOS ESTIMADOS PARA CADA COMPONENTE VARIANTE NO TEMPO .	30
TABELA 5 - ANÁLISE DOS ERROS DE PREVISÃO (RMSE) DAS TAXAS DE MORTALIDADE POR MODELO PARA A AMOSTRA IN-SAMPLE (2000-2015)	31

AGRADECIMENTOS

A Deus por ter me dado saúde e força para superar os desafios da minha trajetória académica.

Aos meus familiares que sempre me apoiaram e estão diretamente relacionados com a pessoa que me tornei.

À minha amiga Carla Abrantes que me ajudou nos momentos mais difíceis e deu-me suporte para continuar o meu sonho de concluir o mestrado.

Ao meu ex-chefe, Rui Cabral, que tornou possível a oportunidade de estar em Portugal.

À minha orientadora, Alexandra Bugalho, que não mediu esforços para me ajudar no desenvolvimento deste trabalho.

E a todos que direta ou indiretamente fizeram parte da minha formação.

MODELAÇÃO DO RISCO DE LONGEVIDADE

Por Hosana Sousa

1. INTRODUÇÃO

A atividade de seguro possui um papel social suplementar aos serviços do Estado, sendo fundamental para suprir as lacunas do serviço público, como, por exemplo, na cobertura de riscos de seguros de saúde ou benefícios de planos poupança reforma. Por esse e outros motivos, há uma preocupação quanto à gestão de riscos e garantia da solvência das instituições que operam no setor de seguros.

O presente estudo foca-se nos seguros associados à sobrevivência da pessoa segura e, mais precisamente, nos seguros de rendas vitalícias diferidas. De acordo com a ASF (2015), estes seguros correspondem a um contrato através do qual o segurador se compromete a pagar prestações para toda a vida, ao beneficiário do contrato, a partir de uma data futura. Relativamente a esses seguros, será estudada uma componente do risco relacionado à fixação de preços inadequada e pressupostos de provisionamento incorretos, nomeadamente o risco específico de seguros, também comumente chamado de risco de subscrição.

Com a publicação da Diretiva 2009/138/CE, as seguradoras da União Europeia, passaram a ter que analisar a sua solvência através do cálculo do requisito de capital de solvência (SCR). O SCR é calculado através da mensuração de riscos inesperados, ao qual uma entidade seguradora está exposta, e deve ser coberto por fundos próprios elegíveis, conforme previsto na regulamentação. O requisito de capital de solvência deverá ser determinado como o capital económico que as empresas de seguros deverão constituir para cumprir as obrigações que assumiram com os tomadores de seguros e os beneficiários durante os próximos 12 meses, com uma probabilidade de pelo menos 99,5%. O SCR pode ser calculado através da fórmula padrão definida na Diretiva ou através de uma metodologia própria (modelo interno), mediante autorização do órgão de supervisão local.

De entre os riscos que devem ter tido em conta no cálculo do SCR, está o risco de longevidade. Este corresponde a um submódulo do risco específico de seguros e reflete o risco de perda ou de evolução desfavorável do valor dos elementos do passivo decorrentes

da atividade seguradora, resultante de alterações no nível, tendência ou volatilidade das taxas de mortalidade, sempre que uma diminuição da taxa de mortalidade leve a um aumento do valor dos referidos elementos.

Este trabalho pretende desafiar a abordagem regulamentar de cálculo do risco de longevidade, já que, para alcançar objetividade e simplicidade, a fórmula padrão é uniformemente aplicada às carteiras de seguros, independente da idade, período e ano de nascimento dos indivíduos.

Esse debate também foi apresentado pelo mercado de seguros à EIOPA, no *Consultation Paper on EIOPA's second set of advice to the European Commission on specific items in the Solvency II Delegated Regulation* (EIOPA 2017), na tentativa de revisão da abordagem padrão de cálculo do risco de longevidade.

Neste sentido, o presente trabalho analisará a mortalidade, tendo em conta a estimação das taxas de mortalidade por meio de abordagens estocásticas, através de três modelos, - Lee Carter (1992), *Age-Period-Cohort* (proposto por Currie, 2006) e Cairns-Blake-Dowd (2006) - que tentam superar as fraquezas identificadas no modelo proposto pela fórmula padrão do Solvência II. Após a estimação, devido à dinâmica desses modelos, é necessário realizar previsões das componentes variantes no tempo e das taxas de mortalidade, para que seja possível realizar o cálculo da melhor estimativa das provisões técnicas, admitindo uma carteira hipotética (Ver anexo).

De seguida, serão realizadas simulações da melhor estimativa para obter a distribuição de perdas e, posteriormente, determinar o requisito de capital para o risco de longevidade através do VaR 99,5%.

Também será calculada a melhor estimativa e o requisito de capital para o risco de longevidade, em conformidade com a metodologia da fórmula padrão, considerando uma tábua de mortalidade de referência do mercado e os dados de mortalidade observados.

Por fim, serão comparadas as mortalidades, o impacto sobre a melhor estimativa e os requisitos de capital para o risco de longevidade dos modelos dinâmicos referidos anteriormente com os resultados sob a abordagem padrão.

2. REVISÃO DE CONCEITOS E FORMULAÇÕES ATUARIAIS

Antes de detalhar cada um dos modelos que serão estudados e, para que se tenha uma clara compreensão dos mesmos, será realizada uma breve revisão de alguns dos principais conceitos e formulações atuariais aplicados neste estudo. Ver Bowers et al (1997), Jordan (1991) e Dickson (2009).

- Tempo de vida futuro de uma pessoa de idade x

Considere que (x) denota um indivíduo de idade x , em que $x \geq 0$. A morte de (x) ocorre a qualquer idade maior que x e o tempo de vida futuro de (x) é modelizado através de uma variável aleatória contínua representada por T_x . Isto significa que $x + T_x$ corresponde a variável aleatória idade da morte de (x) .

Sendo F_x a função de distribuição de T_x , então:

$$(1) \quad F_x(t) = Pr(T_x \leq t)$$

E, portanto, $F_x(t)$ é a probabilidade de (x) morrer antes da idade $x + t$.

Contudo, frequentemente também há interesse na probabilidade de sobrevivência:

$$(2) \quad S_x(t) = 1 - F_x(t) = P(T_x > t)$$

Em que $S_x(t)$ é designada função de sobrevivência e representa a probabilidade de (x) sobreviver, pelo menos, mais t anos.

Usando a notação atuarial internacional, também se representa $S_x(t)$ por ${}_t p_x$ e $F_x(t)$ por ${}_t q_x$

Nota-se que, quando $t = 1$, o primeiro índice de ${}_t p_x$ e ${}_t q_x$ é omitido. Neste caso, a probabilidade de (x) sobreviver a idade $x + 1$ pode ser denotada por p_x , e a probabilidade de (x) morrer dentro de 1 ano, por q_x . Na terminologia atuarial q_x , também é conhecido por taxa de mortalidade.

- Força de mortalidade

A força de mortalidade, também designada taxa instantânea de mortalidade, expressa a probabilidade de (x) morrer entre as idades x e $x + dx$, dado que sobreviveu a idade x e assumindo que o intervalo de tempo dx tende a zero. Algebricamente, tem-se:

$$(3) \quad \mu_x = \lim_{dx \rightarrow 0^+} \frac{1}{dx} \Pr[T_0 \leq x + dx \mid T_0 > x].$$

$$(4) \quad \mu_x = \frac{-S'(x)}{S(x)}$$

- Taxa central de morte

A taxa central de morte é calculada como o rácio entre o número de mortes entre a idade x e a idade $x + 1$ (d_x) e o número médio de pessoas expostas ao risco ao longo de um ano (E_x):

$$(5) \quad m_x = \frac{d_x}{E_x}$$

Quando se trata de modelos dinâmicos de mortalidade, faz sentido utilizar o conceito de força de mortalidade. No entanto, para idades inteiras, admite-se que a força de mortalidade e a taxa central de morte coincidem, como também será considerado no âmbito deste trabalho.

A taxa central de morte, m_x , e a taxa de mortalidade, q_x , são tipicamente muito próximas uma da outra e relacionam-se de acordo com a seguinte expressão:

$$(6) \quad q_x = 1 - \exp(-\mu_x) \approx 1 - \exp(-m_x)$$

E, portanto:

$$(7) \quad m_x = -\log(1 - q_x)$$

- Tábuas de mortalidade

Uma tabela de mortalidade é uma tabela que associa a cada idade uma probabilidade de morte dentro de 1 ano, q_x , em que este valor é obtido através do rácio entre o número de mortes entre a idade x e a idade $x + 1$, d_x , e o número de vivos na idade x , l_x .

$$(8) \quad q_x = \frac{d_x}{l_x}$$

As tábuas de mortalidade podem ser contemporâneas (estáticas) ou geracionais (dinâmicas). As tábuas estáticas são construídas tendo em conta a experiência de mortalidade de uma população num determinado período. Estas estimam um padrão de mortalidade, assumindo que os indivíduos estão sujeitos ao mesmo comportamento de mortalidade ao longo do tempo, variando apenas por idade. Por outro lado, as tábuas geracionais estudam a população nascida em cada ano civil e, portanto, o seu

comportamento de mortalidade varia não apenas ao longo das idades, como também de acordo com o ano de nascimento.

Neste trabalho, foram utilizados dados de mortalidade extraídos da *Human Mortality Database*. Esses dados contêm taxas de mortalidade para a população portuguesa, variando por idade e por ano, desde 1940 até 2015. Relativamente às idades, os três modelos considerados neste trabalho, apenas utilizam as idades entre 25 e 90 anos no processo de estimação dos parâmetros. Desta forma, as taxas de mortalidade ajustam-se melhor ao perfil das carteiras de seguros. Por outro lado, evita-se a falta de precisão dos dados das idades mais avançadas.

Importa referir que, apesar da fase de estimação dos modelos considerar apenas a mortalidade nas idades entre os 25 e os 90 anos, para o cálculo da melhor estimativa das provisões técnicas e, conseqüentemente, do SCR, é necessário conhecer a mortalidade nas idades posteriores a 90 anos, até o horizonte de previsão considerado, nomeadamente até 120 anos. Deste modo, após estimados os modelos, aplica-se uma extrapolação, que será descrita no tópico seguinte.

Do lado da obtenção da melhor estimativa das provisões técnicas e do SCR através da abordagem padrão, as taxas de mortalidade são estáticas, ou seja, são consideradas as mesmas taxas para todos os anos de avaliação. Usando a fórmula padrão, estimam-se duas propostas de melhor estimativa das provisões técnicas pela fórmula padrão. Uma aplica taxas de mortalidade calculadas com base nos dados de mortes e expostos por idade observados na base de dados (dos 25 aos 90 anos com dados observados e, por extrapolação, dos 90 aos 120 anos). A outra é calculada a partir da tábua GKM-80¹, tábua de mortalidade construída com dados de seguradoras suíças durante os anos de 1971 a 1975. Para ajustar a experiência de mortalidade da população em estudo à GKM-80, utiliza-se um percentual mais realista desta tábua, uma vez que ela na sua versão original não reflete os dados de mortalidade da população portuguesa atual. Este ajuste corresponde à proporção média entre a taxa de mortalidade observada da população e às taxas da GKM-80 nos últimos 2 anos.

- Extrapolação

¹ Disponível em <https://mort.soa.org/>

Tendo em conta que a informação de mortalidade para idades mais avançadas é pouco precisa, para que seja possível calcular a melhor estimativa das provisões técnicas e o SCR, é necessário realizar uma extrapolação para estimar as taxas de mortalidade na cauda da distribuição (dos 90 anos aos 120 anos de idade).

Kannisto (1992) apresentou um modelo de dois parâmetros amplamente usado na modelação das taxas de mortalidade em idades mais avançadas. O modelo assume que o logit da força de mortalidade² é uma função linear da idade. Algebricamente, isto pode ser expresso como:

$$(9) \quad \mu_x = \frac{ae^{bx}}{1+ae^{bx}}$$

Para a estimação dos parâmetros, foi usada uma regressão linear, na qual o $\log(\mu_x/(1-\mu_x))$ possui uma relação linear com a idade. A extrapolação de Kannisto, segue uma curva do tipo logística para a força de mortalidade e à medida que a idade aumenta, a força de mortalidade tende assintoticamente para 1.

- Anuidades vitalícias

Para proceder ao cálculo da melhor estimativa das provisões técnicas é necessário introduzir o conceito de anuidades vitalícias.

O termo anuidade vitalícia ou renda vitalícia refere-se a uma série de pagamentos a um indivíduo, desde que o mesmo esteja vivo na data de pagamento. Para efeitos deste estudo, será avaliada uma carteira de pagamento de rendas anuais e constantes, a pagar a partir dos 66 anos de idade.

O valor atual de uma renda antecipada³ vitalícia diferida de n anos é expresso por:

$$(10) \quad {}_n\ddot{a}_x = \sum_{k=n}^{\infty} v^k {}_k p_x$$

Em que:

${}_k p_x = 1 - {}_k q_x$, $v^k = \left(\frac{1}{1+i}\right)^k$ e n é o período de diferimento, tendo em conta que os pagamentos de rendas só serão devidos a partir dos 66 anos de idade

² Em que $\text{logit}(\mu_x)$ é definido como $\log(\mu_x/(1-\mu_x))$.

³ Pagável no início do ano. Pela notação atuarial, usa-se um trema acima do “a”.

A taxa de juros i utilizada é a estrutura temporal de taxa de juros livre de risco divulgada pela EIOPA para a data-base de avaliação das provisões.

- Provisões Técnicas

O objetivo deste trabalho é mensurar o risco de longevidade, que é baseado no cálculo da melhor estimativa das provisões técnicas para uma carteira hipotética de rendas (ver anexo).

O conceito de provisões surge da necessidade de mensurar as responsabilidades das companhias de seguro, com respeito a um grupo de apólices, em períodos subsequentes ao da sua data de emissão. De forma geral, as provisões podem ser expressas pela diferença entre o valor esperado dos pagamentos futuros e o valor esperado dos prémios futuros:

${}_t V_x = \text{valor esperado, em } t, \text{ dos pagamentos futuros} - \text{valor esperado, em } t, \text{ dos prémios futuros}$

No âmbito do Solvência II, as provisões técnicas são chamadas de melhor estimativa para enfatizar o uso de pressupostos e técnicas mais realistas. Para fins deste trabalho será considerada a melhor estimativa das provisões técnicas líquida de resseguro⁴.

Para a carteira de rendas objeto deste estudo, composta por prémios anuais fixos a pagar em n anos, sendo as rendas devidas após este mesmo período e a pagar de forma vitalícia, a melhor estimativa das provisões técnicas ao fim de t anos, calculada sob uma ótica prospetiva, é dada por:

$$(11) \quad {}_t V_x = \text{renda} \times {}_{n-t} \ddot{a}_x - \text{Prémio} \times \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}$$

- Value at Risk (VaR)

Após calculada a melhor estimativa das provisões técnicas, o último passo é o cálculo do requisito de capital para o risco de longevidade dos modelos alternativos à fórmula padrão. Como será detalhado no próximo capítulo, não se aplica a metodologia VaR para o cálculo do requisito de longevidade na ótica da abordagem padrão.

⁴ Operação pela qual uma empresa de seguros transfere, total ou parcialmente, os riscos assumidos.

O *Value at Risk* ou Valor em Risco (VaR) representa a perda máxima potencial ou esperada para uma carteira, em unidades monetárias, num dado espaço de tempo e a um certo nível de probabilidade.

O requisito de capital é obtido através do VaR 99,5% da distribuição de perdas simuladas para cada modelo analisado.

3. SOLVÊNCIA II E A FÓRMULA PADRÃO

Um dos objetivos da supervisão de seguros é garantir a estabilidade e solidez do sistema financeiro e assegurar a proteção dos tomadores de seguros, segurados, subscritores, participantes, beneficiários e lesados.

O regime de Solvência das seguradoras da União Europeia foi introduzido na década de 70, apesar de ainda muito simples, se comparado ao atual estágio. No tocante à supervisão da solvência das empresas de seguros, as Diretivas publicadas, nessa altura, determinavam, além da constituição de reservas técnicas, que as seguradoras de vida mantivessem uma margem de solvência, que equivalia a uma quotização das reservas e do capital em risco.

Mais tarde, impulsionado pela crise de 2008 e pela evolução regulamentar verificada no mercado bancário, que já estava inclusive caminhando para um ambiente regulamentar ainda mais rigoroso, através do Basileia III, verificou-se a necessidade de adotar uma abordagem económica baseada no risco, incentivando as empresas de seguros e de resseguros a avaliarem e gerirem os seus riscos de forma mais prudente. A este novo quadro regulamentar, deu-se o nome de regime Solvência II, tendo ficado concretizado por meio da Diretiva 2009/138/CE.

O projeto Solvência II instituiu um novo modelo de gestão de riscos às companhias de seguro europeias com requisitos baseados em três pilares: Requisitos quantitativos, qualitativos e de reporte. No âmbito do pilar I, enfoque deste trabalho, os requisitos centram-se sobretudo no cálculo de uma melhor estimativa para o cálculo das provisões técnicas (*Best Estimate Liability*, BE) e no requisito de capital de solvência (*Solvency Capital Requirement*, SCR).

Para avaliar consistentemente a capacidade de honrar com seus compromissos futuros, as empresas de seguro devem calcular a melhor estimativa das provisões técnicas, correspondente ao valor esperado dos fluxos de caixa futuros, ponderados pela sua probabilidade de ocorrência e descontados pela estrutura temporal das taxas de juro sem risco divulgada pela EIOPA. Estes fluxos de caixa consistem na projeção dos fluxos de entrada e saída necessários para cumprir as responsabilidades de seguros ou de resseguros na totalidade do respetivo período de vigência e, conforme definido no RD 2015/35 incluem:

- a) Pagamentos de benefícios aos tomadores de seguros;
- b) Pagamentos de prémios;
- c) Outros fluxos, que não serão considerados neste trabalho.⁵

O cálculo da melhor estimativa deve ter em conta ainda, de acordo com o RD 2015/35, a evolução futura em termos demográficos, jurídicos, médicos, tecnológicos, sociais, ambientais e económicos, nomeadamente a inflação, incluindo a inflação das despesas e dos sinistros.

Em termos de requisito de capital (SCR), este deverá refletir um nível de fundos próprios elegíveis que permita às empresas de seguros e de resseguros a absorção de perdas significativas e que dê uma razoável garantia aos tomadores de seguros e aos beneficiários do pagamento dos respetivos benefícios. O cálculo do SCR, em conformidade com a 2009/138/CE, envolve a quantificação do:

- Risco de mercado: O risco de perda, ou de evolução desfavorável da situação financeira, direta ou indiretamente ligada às variações do nível e da volatilidade dos preços de mercado dos elementos do ativo e do passivo, bem como dos instrumentos financeiros;
- Risco de crédito: O risco de perda, ou de evolução desfavorável da situação financeira, decorrente de variações da qualidade de crédito dos emitentes de valores mobiliários, contrapartes e devedores, a que estão expostas as

⁵ A carteira considerada neste trabalho apenas possui dados de prémios para um grupo de segurados (Ver Anexo A). Não são levadas em conta informações a respeito, por exemplo, de despesas, comissões, benefícios contratuais adicionais, entre outros.

empresas de seguros e de resseguros, sob a forma de risco de incumprimento pela contraparte, risco de *spread* ou concentrações de risco de mercado;

- Risco específico de seguros: O risco de perda, ou de evolução desfavorável do valor dos elementos do passivo decorrentes da atividade seguradora, devido a uma fixação de preços inadequada e a pressupostos de provisionamento incorretos;
- Risco operacional: O risco de perdas resultantes de procedimentos internos inadequados ou deficientes, do pessoal ou dos sistemas, ou ainda de acontecimentos externos.

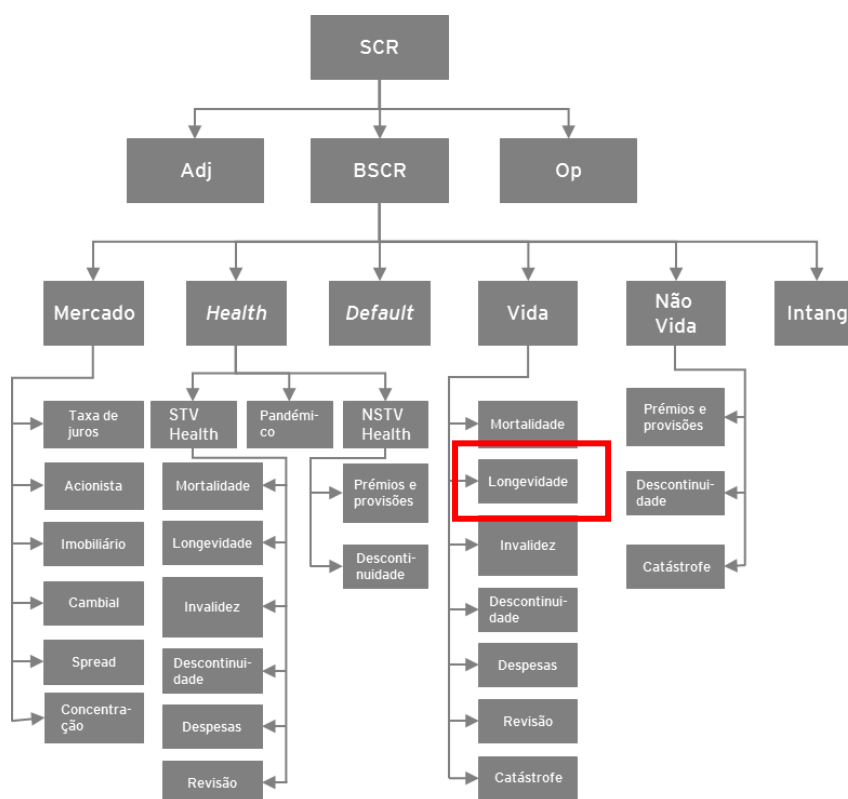


FIGURA 1 - ESQUEMA DO REQUISITO DE CAPITAL DE SOLVÊNCIA

Este trabalho limitou-se ao cálculo do requisito de capital de solvência para o risco de longevidade, submódulo do risco específico de seguros de vida.

Conforme estabelecido na regulamentação do Solvência II, o risco de longevidade corresponde ao risco de perda ou de evolução desfavorável do valor dos elementos do passivo decorrentes da atividade seguradora, resultante de alterações no nível, tendência

ou volatilidade das taxas de mortalidade, sempre que uma diminuição da taxa de mortalidade leve a um aumento do valor dos referidos elementos.

O requisito de capital para o risco de longevidade, usando a fórmula padrão do Solvência II, é igual às perdas, nos fundos próprios de base das empresas de seguros e de resseguros, que resultariam de uma redução permanente instantânea de 20% das taxas utilizadas para calcular provisões técnicas, ou seja:

$$(12) \quad q'_x = 0,8 \times q_x$$

No que concerne à aplicação prática, o cálculo da melhor estimativa (BE) foi realizado mediante a implementação da equação (11), aplicada a um portfolio hipotético de apólices, tendo em conta as taxas de mortalidade, q_x , apresentadas a seguir.

Neste estudo, para a obtenção de melhores estimativas das provisões técnicas (BE), sob a abordagem padrão, serão consideradas duas experiências de mortalidade, q_x :

- A média dos últimos 2 anos (2014-2015), para cada idade, das taxas de mortalidade observadas na base de dados da população portuguesa extraída da *The Human Mortality Database*;
- 45,49% da tábua GKM-80, cujo percentual corresponde a média dos últimos 2 anos (2014-2015) da proporção entre a mortalidade observada e a mortalidade dada pela tábua GKM-80.

A consideração do pressuposto da mortalidade futura equivalente à média dos últimos 2 anos e à utilização da GKM-80 tem o objetivo de replicar às práticas do mercado de seguros portugueses. Por exemplo, no Relatório sobre a Solvência e a Situação Financeira (SFCR) 2017 da Victoria Vida, a companhia reporta que a análise da adequação do pressuposto de mortalidade/longevidade, relativamente às rendas vitalícias, é efetuada com base na mortalidade real dos últimos 5 anos.

É uma prática do mercado português aplicar fatores às tábuas de mortalidade assumidas como pressuposto. O objetivo desta prática é ajustar tábuas de mortalidade estáticas à realidade atual portuguesa e aos seus portfolios, dado que tais tábuas se encontram desfasadas e o seu valor sem ajuste não reflete a experiência real.

Relativamente aos dados contidos na *The Human Mortality Database*, consideram-se apenas as taxas de mortalidade, dos dados observados, entre as idades de 25 a 90 anos.

Uma extrapolação é realizada para estimar as taxas de mortalidade das idades superiores a 90 e até 120 anos.

Já no caso da tábua GKM-80, consideram-se as taxas de mortalidade definidas pela tábua até a última idade (117 anos) e igual a 1 para os anos seguintes (até aos 120 anos).

Depois de definido o pressuposto de mortalidade considerado para a taxa de mortalidade futura do cálculo da melhor estimativa (BE), procede-se ao cálculo do SCR. Sob a abordagem padrão, para calcular o SCR, aplica-se um choque de 20% sobre as taxas de mortalidade, obtendo-se a melhor estimativa das provisões técnicas pós-choque. O SCR será a diferença entre a melhor estimativa pós choque e o cenário base:

$$(13) \quad SCR = BE_{pós-choque} - BE_{cenário\ base}$$

Em que:

$BE_{pós-choque}$ resulta da implementação da equação (11), usando q'_x

$BE_{cenário\ base}$ resulta da implementação da equação (11), usando q_x

4. BREVE ANÁLISE DESCRITIVA

Antes de introduzir os modelos de mortalidade, é interessante analisar o comportamento dos dados da taxa de mortalidade da população portuguesa dos 25 aos 90 anos de idade, extraídos da *Human Mortality Database*.

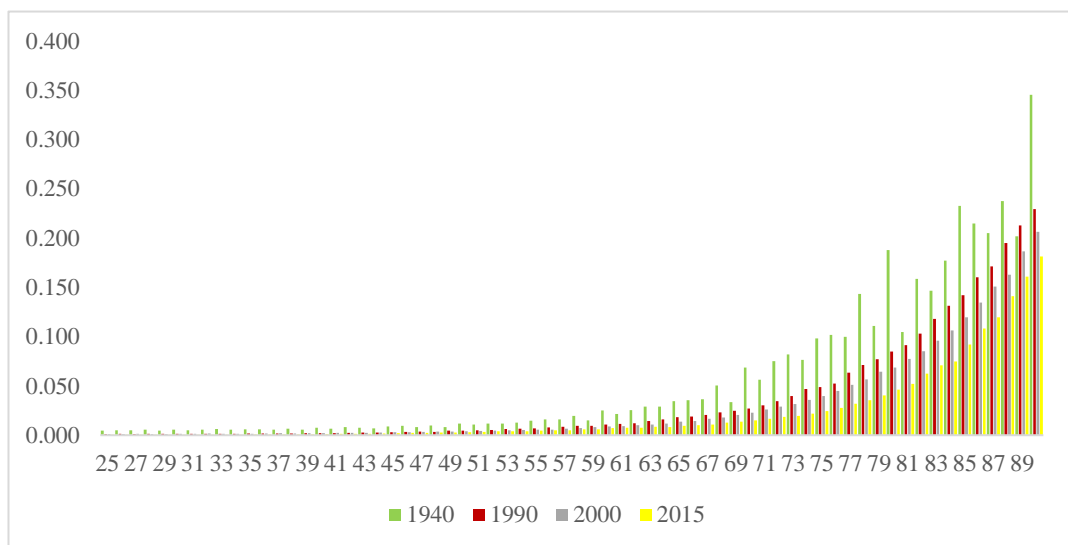


FIGURA 2 - TAXA DE MORTALIDADE POR IDADE E ANO E ANO DA MORTE

Através da Figura 2 observa-se que as taxas de mortalidade aumentam à medida que as idades aumentam e diminuem face ao aumento do ano da morte.

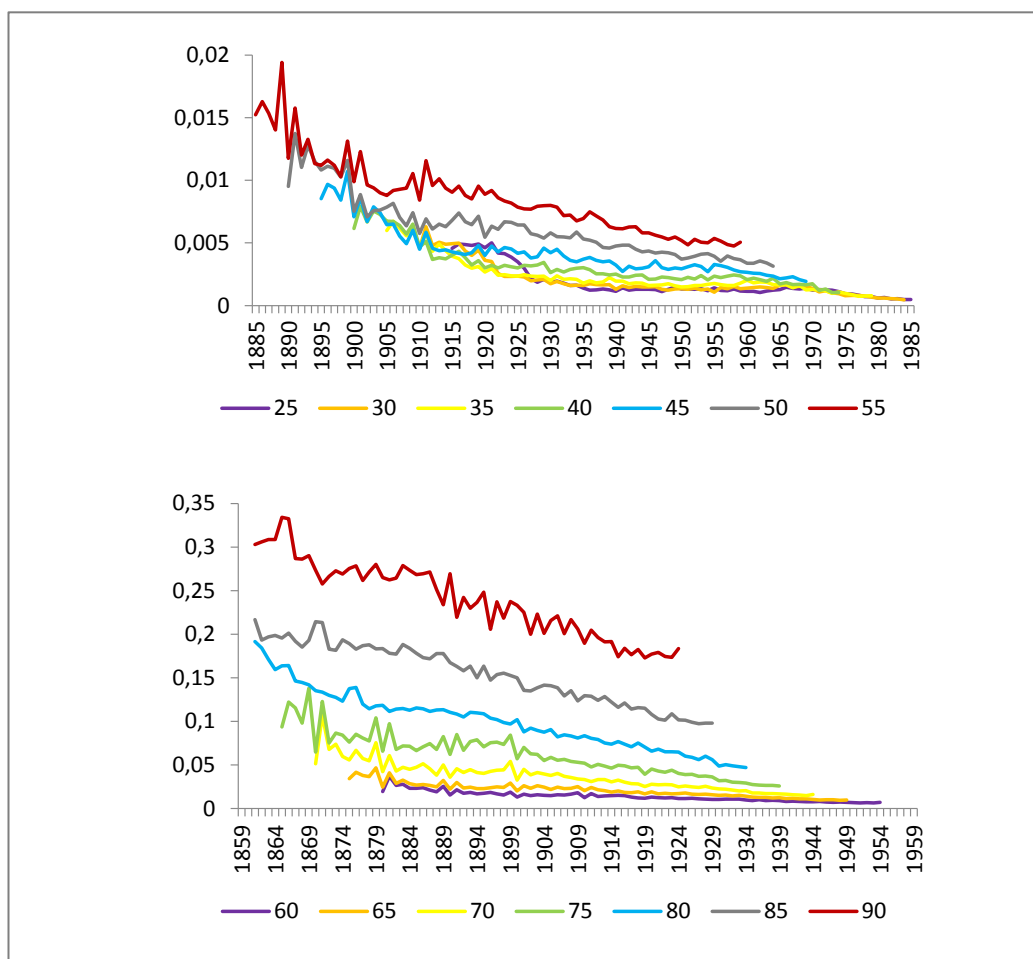


FIGURA 3 – TAXA DE MORTALIDADE POR IDADE E ANO DE NASCIMENTO

Relativamente ao ano de nascimento, observa-se que as taxas de mortalidade da população portuguesa tendem a diminuir com a evolução das gerações. Por outro lado, também verificam-se picos de aumento das taxas de mortalidade nas gerações mais antigas.

A análise do efeito das idades, ano da morte e ano de nascimento sobre as taxas de mortalidade revela que essas componentes devem expressar algum tipo de relacionamento com o comportamento das taxas de mortalidade. Dentro desse contexto é que surgem os modelos estocásticos de mortalidade.

5. MODELOS DE MORTALIDADE

A longevidade é um dos temas que tem ganhado materialidade com o decorrer do tempo. Para Fuchs (2010), as inovações biomédicas tem sido fontes primárias para o aumento da longevidade, desde a Segunda Guerra Mundial.

No caso de Portugal, de acordo com a Revista de Estudos Demográficos do INE (2015), a introdução do Plano Nacional de Vacinação em 1965, as medidas de apoio à saúde materna e infantil na década de 1970 e o alargamento do acesso aos cuidados de saúde com a criação em 1979 do Sistema Nacional de Saúde foram contributos essenciais para o declínio da mortalidade infantil após 1960.

São fatos históricos como esses que motivam o estudo e revelam a importância de gerir o risco de longevidade, ao qual as empresas de seguro do ramo vida estão expostas por meio de técnicas mais precisas.

O *Consultation Paper on EIOPA's second set of advice to the European Commission on specific items in the Solvency II Delegated Regulation (EIOPA CP 17-006)* menciona algumas das discussões levantadas pelo mercado para recalibração da fórmula padrão, sendo uma delas referente ao choque de longevidade de 20% ser sobrestimado para idades acima de 60 anos e subestimado para idades abaixo de 60 anos. Isto acontece porque teoricamente as pessoas mais jovens tendem a beneficiar mais das melhorias futuras de mortalidade, principalmente devido ao progresso da medicina e inovações tecnológicas.

A base de dados utilizada pela EIOPA para obter o fator de *stress* a usar no cálculo do risco de longevidade provém da *Human Mortality Database*. Este também pode ser um ponto negativo, relativamente à fórmula padrão, já que os riscos de longevidade da população segura de uma companhia de seguro podem variar face a esses dados, tanto pela natureza da população, como pelo perfil de produtos comercializados pelas empresas.

Outra questão levantada pelo mercado está relacionada com a granularidade do *stress* a aplicar. A fórmula padrão aplica um único *stress* em todas as taxas de mortalidade. No entanto, sabe-se que essas taxas podem variar por idade ou grupos de idade, ano-calendário, género, tipo de produtos, localização geográfica, fatores socioeconómicos (como educação, nível de renda, profissão etc), entre outros.

5.1. Revisão de Literatura

Modelos para descrever a evolução da mortalidade têm vindo a ser estudados desde 1729, quando De Moivre iniciou o estudo de modelos clássicos expressos através de abordagens paramétricas.

As mais famosas leis clássicas de mortalidade são sintetizadas a seguir:

- a) De Moivre (1729) considerou que a distribuição da idade no momento da morte seguia uma distribuição uniforme, logo a força de mortalidade tem a seguinte expressão:

$$(14) \quad \mu_x = \frac{1}{w-x}, \text{ sendo } 0 \leq x < w$$

- b) Gompertz (1825) modelou a força de mortalidade como uma função exponencial, assumindo que esta aumentava exponencialmente com a idade do indivíduo:

$$(15) \quad \mu_x = Bc^x, \text{ sendo } x \geq 0, B > 0 \text{ e } c > 1$$

- c) Makeham (1860) introduziu um novo elemento à fórmula de Gompertz, de forma a capturar melhor o comportamento em idades mais elevadas. Este modelo também permite descrever o risco de morte por causas independentes da idade, ou seja, que se referem a fatores de incerteza.

$$(16) \quad \mu_x = A + Bc^x, \text{ sendo } x \geq 0, B > 0 \text{ e } c > 1$$

- d) Heligman and Pollard (1980) propuseram um modelo que tentasse ajustar-se bem a todas as idades. Para isso, o modelo contém três termos a representar componentes distintas. O primeiro termo reflete a queda na mortalidade durante a infância, o segundo, o padrão observado nas idades mais juvenis e o terceiro, o padrão exponencial de mortalidade observado nas idades adultas:

$$(17) \quad q_x/p_x = A^{(x+B)^c} + D \exp\{-E(\log x - \log F)^2\} + GH^x$$

Estas leis paramétricas têm a vantagem de serem de fácil aplicabilidade e compactas. Contudo, no geral, elas são insuficientes para explicar a dinâmica da mortalidade devido à sua simplicidade. As modelações posteriores a estas ganharam força por representarem melhor a dinâmica de mortalidade, além de incorporarem componentes aleatórias (número de mortes) e sistemáticas (efeitos da idade, tempo e ano de nascimento ou coorte). Como a mortalidade futura é incerta, os modelos mais recentes acabam por

satisfazer as necessidades de previsões para assegurar a boa gestão do risco, como o cálculo das provisões técnicas e do requisito de capital de solvência, entre outros.

Surgiram, então, os modelos de mortalidade estocásticos apresentados na Tabela 1, que incorporam as funções $\beta_x^{(i)}$, $k_t^{(i)}$ e $\gamma_{t-x}^{(i)}$ que representam, respetivamente os efeitos da idade, período e coorte.

Em termos de estimação, no geral, os modelos mais complexos devem se ajustar melhor aos dados atuais. Por outro lado, modelos mais complexos também podem levar a problemas de *overfitting*. Neste trabalho, optou-se por seleccionar modelos mais simples, além de populares em estudos similares.

TABELA 1 - FORMULAÇÃO DOS MODELOS DE MORTALIDADE ESTOCÁSTICOS

Modelo	Formulação
M1: Lee Carter (1992)	$\log m(x, t) = \alpha_x + \beta_x k_t + \varepsilon_{x,t}$
M2: Renshaw e Haberman (2006)	$\log m(t, x) = \beta_x^{(1)} + \beta_x^{(2)} k_t + \beta_x^{(3)} \gamma_{t-x}$
M3: Currie (2006)	$\log m(t, x) = \beta_x + k_t + \gamma_{t-x}$
M4: Currie et al. (2004)	$\log m(t, x) = \sum_{i,j} \theta_{i,j} B_{i,j}^{a,y}(x, t)$
M5: Cairns, Blake and Dowd (2006)	$\text{logit } q(t, x) = k_t^{(1)} + k_t^{(2)}(x - \bar{x})$
M6: Cairns et. Al (2009)	$\text{logit } q(t, x) = k_t^{(1)} + k_t^{(2)}(x - \bar{x}) + \gamma_{t-x}$
M7: Cairns et. Al (2009)	$\text{logit } q(t, x) = k_t^{(1)} + k_t^{(2)}(x - \bar{x}) + ((x - \bar{x})^2 - \hat{\sigma}^2) + \gamma_{t-x}$
M8: Cairns et. Al (2009)	$\text{logit } q(t, x) = k_t^{(1)} + k_t^{(2)}(x - \bar{x}) + \gamma_{t-x}(x_c - x)$

Fonte: Cairns *et al.* (2009), p. 7.

Assim, escolheram-se os modelos de mortalidade de Lee Carter (M1, na Tabela 1), que será denominado a seguir como LC, o modelo Age-Period-Cohort (M3, na Tabela 1), que será referido aqui como APC e, por fim, o modelo, Cairns, Blake and Down (M5, na Tabela 1), que será referido como CBD.

O cálculo do requisito de capital para o risco de longevidade, admitindo a mortalidade ajustada aos modelos LC, APC e CBD, será realizado de acordo com os seguintes passos:

- a) Estimação dos modelos de mortalidade LC, APC e CBD, a partir das taxas de mortalidade observadas da população portuguesa (extraídas da *Human Mortality Database*) de 1940 a 2015 para as idades de 25 a 90 anos. Neste passo é utilizado o pacote *StMoMo*⁶, disponível no *software* R. Ver também Currie (2016).
- b) Identificação da metodologia de previsão dos termos variantes no tempo dos modelos de mortalidade LC, APC e CBD, através do *software E-views* e subsequente previsão das taxas de mortalidade nas idades de 25 a 90 anos para anos posteriores a 2015.
- c) Extrapolação das taxas de mortalidade para idades superiores a 90 anos, admitindo-se que a última idade onde há sobreviventes é 120 anos.
- d) Cálculo da melhor estimativa das provisões técnicas para um portefólio hipotético de rendas (Ver Anexo A), com data de avaliação a 2015, usando as taxas de mortalidade estimadas nos passos anteriores. O cálculo admite a estrutural temporal de taxas de juro livre de risco divulgadas pela EIOPA, com data-base a 31 de dezembro de 2015, e idade de reforma aos 66 anos.
- e) Simular⁷ trajetórias futuras de mortalidade, seguindo os modelos de mortalidade LC, APC ou CBD, para obtenção de uma distribuição de perdas e determinação do requisito de capital para o risco de longevidade através do VaR 99,5%.

5.2. Modelo de Lee Carter (LC)

Lee and Carter (1992) desenvolveram um modelo para estimar e prever a taxa de mortalidade através de dados da população dos Estados Unidos de 1933 a 1987. A análise dos autores restringiu-se à mortalidade por faixa etária do total da população (homens e mulheres). O método não tem o objetivo de incorporar conhecimento sobre influências comportamentais ou sociais sobre a mortalidade, mas sim combinar um modelo demográfico parcimonioso com um método de séries temporais. O modelo proposto por Lee and Carter (1992) é definido por:

⁶ O pacote *StMoMo*, disponível no *software* R, permite ajustar, avaliar a qualidade do ajuste e realizar projeções de mortalidade para os modelos de mortalidade estocástica da família generalizada *Age-Period-Cohort*.

⁷ O pacote *StMoMo* possui uma função já implementada para simular trajetórias futuras de mortalidades, a partir dos parâmetros estimados para os modelos estocásticos de mortalidade. O procedimento baseia-se na técnica de Monte Carlo. A simulação de Monte Carlo é um procedimento utilizado para gerar resultados possíveis por amostragem a partir de uma distribuição teórica com parâmetros predefinidos.

$$(18) \quad \log m(x, t) = \alpha_x + \beta_x k_t + \varepsilon_{x,t}$$

Em que:

- $m(x, t)$ corresponde à taxa central de mortalidade para a idade x no ano t ;
- α_x e β_x são termos constantes por faixa etária, sendo β_x a resposta de $\log m(x, t)$ face à mudanças em k_t ;
- k_t representa um índice do nível de mortalidade variante no tempo;
- $\varepsilon_{x,t}$ reflete as influências históricas por idade não capturadas pelo modelo e possui média zero e variância σ_ε^2 .

Para estimar este modelo, o método de mínimos quadrados ordinários não pode ser ajustado, já que os regressores não são conhecidos. No membro direito da equação, apenas existem parâmetros desconhecidos e o índice k_t que também é desconhecido. Desta forma, o método aplicado para encontrar a solução de mínimos quadrados para a equação (18), é a decomposição em valores singulares (SVD), método usado para fatorar matrizes, separando informações latentes escondidas. O método SVD decompõe uma dada matriz, em outras três, sendo duas ortogonais e uma diagonal.

Para estimar o modelo representado pela equação (18), evitando problemas de identificação, Lee and Carter assumem as seguintes restrições:

$$(19) \quad \sum_x \beta_x = 1 \text{ e } \sum_t k_t = 0$$

Consequentemente, se definido o valor médio de k como zero, então α_x tem que ser igual à média de $\log m(x, t)$ ao longo do tempo.

$$(20) \quad \hat{\alpha}_x = \frac{\sum_t \log m(x, t)}{T}$$

Neste trabalho, no entanto, os parâmetros serão estimados sob a ótica dos modelos não lineares generalizados. Conforme proposto por Brouhns *et al.* (2002), será assumida uma distribuição de Poisson para o número de mortes e a função de ligação (*link function*) logaritmo com respeito à força de mortalidade. Devido ao termo multiplicativo $\beta_x k_t$, esse modelo não se ajusta à estrutura dos modelos lineares generalizados.

Para levar a cabo a estimação, será utilizada o pacote *StMoMo*, - disponível no *software R*, que também leva em conta as restrições usuais dos parâmetros definidas em (19). Ver Millossovich *et al.* (2018).

5.3. Modelo Age Period Cohort (APC)

Como uma generalização do modelo de Lee Carter (1992), mas agora incorporando o efeito do ano de nascimento, Currie (2006) publicou o modelo APC.

Willekens and S. Scherbov (1991) afirmam que o efeito da geração ou coorte é um importante conceito no estudo das mudanças no comportamento humano e experiências ao longo do tempo. Para eles, um coorte é geralmente definido como um grupo de pessoas nascidas durante um mesmo período, sendo interpretadas, em análises APCs, como um grupo que viveu um histórico ou contextos estruturais comparáveis, como depressões, períodos de guerras, período de rápida mudança tecnológica etc.

O modelo APC tem origens nomeadamente em estudos usados no campo da medicina, anteriores ao modelo de Lee Carter (como Osmond, 1985).

Currie (2006) introduziu o modelo mais simples que contempla os efeitos *age-period-cohort*:

$$(21) \quad \log m(t, x) = \beta_x + k_t + \gamma_{t-x}$$

Em que, β_x , k_t e γ_{t-x} representam, respetivamente, os efeitos da idade, ano calendário e coorte sobre a mortalidade.

Currie (2006) usa P-splines para estimar β_x , k_t e γ_{t-x} , garantindo a suavização. No entanto, para realizar a estimação deste modelo, neste trabalho, será utilizada a *library StMoMo*, disponível no *software R*, que estima os parâmetros usando modelos lineares generalizados, sem impor condições de suavização. Para tal, e, sem perda de generalidade, impõem-se as seguintes restrições, para garantir a identificabilidade dos parâmetros:

$$(22) \quad \sum_t k_t = 0, \sum_{c=t_1-x_k}^{t_n-x_1} \gamma_c = 0 \text{ e } \sum_{c=t_1-x_k}^{t_n-x_1} c\gamma_c = 0$$

Como mencionado, a implementação desse modelo será realizada através dos modelos lineares generalizados, assumindo a distribuição de Poisson para o número de mortes e a *link function* logaritmo com respeito a força de mortalidade.

5.4. Cairns-Blake-Dowd (CBD)

O último modelo a ser apresentado é um modelo de mortalidade estocástica de dois fatores que se destaca na modelização de idades mais avançadas.

O modelo proposto por Cairns-Blake-Dowd (2006) foi formulado como:

$$(23) \quad \text{logit } q(x, t) = \log \frac{q(x, t)}{1 - q(x, t)} = k_t^{(1)} + k_t^{(2)} (x - \bar{x}) + \varepsilon_{x, t}$$

Em que:

- $q(x, t)$ corresponde à probabilidade de morte no tempo t para um indivíduo de idade x ;
- $k_t^{(1)}$ e $k_t^{(2)}$ são dois processos estocásticos e representam os índices variantes no tempo do modelo. $k_t^{(1)}$ corresponde ao nível da curva de mortalidade após a transformação logit, enquanto que $k_t^{(2)}$ é a inclinação da curva de mortalidade transformada;
- \bar{x} é a idade média ao longo do intervalo de idades;
- $\varepsilon_{x, t}$ representa o termo de erro que inclui a tendência histórica que o modelo não expressa e possui média zero e variância σ_ε^2 .

O modelo original aplica a transformação $\log \frac{q(x, t)}{1 - q(x, t)}$ à variável dependente e realiza a estimação por mínimos quadrados ordinários (OLS).

Ao aplicar essa transformação, $\log \frac{q(x, t)}{1 - q(x, t)}$ não pode ser definido quando $q(x, t) = 0$ ou $q(x, t) = 1$. Além disso, para prever o modelo na escala original, seria preciso aplicar a transformação inversa.

Como as taxas de mortalidade pertencem ao intervalo $[0, 1]$, os modelos de regressão fracionária podem ser boas alternativas de modelação. Modelos de regressão fracionária são utilizados para modelar o comportamento de variáveis de interesse fracionárias, isto é, variáveis que assumem valores no intervalo $[0, 1]$.

A especificação base dos modelos de regressão fracionária é:

$$(24) \quad E(Y|X) = G(x'\beta)$$

onde a função $G(\cdot)$ respeita a restrição $0 \leq G(\cdot) \leq 1$.

Os modelos de regressão fracionária assumem uma distribuição para $G(\cdot)$. No presente estudo, é assumida a distribuição logit.

Portanto, a implementação do modelo CBD foi realizada no contexto dos modelos de regressão fracionária. Na prática, os modelos de regressão fracionária com distribuição

logit para $E(Y|X)$ correspondem aos modelos lineares generalizados, assumindo a distribuição binomial das mortes e a *link function* Logit. Essa abordagem é também seguida por Haberman and Renshaw (2011).

6. MÉTODOS DE PREVISÃO

Após estimados os modelos, deve-se modelizar e prever os termos variantes no tempo das equações (18), (21) e (23) para que seja possível prever a taxa de mortalidade dos anos posteriores a 2015 (última observação da base de dados). Foi utilizado o *software E-views* para a identificação dos modelos de previsão adequados para $k_t^{(i)}$ e γ_{t-x} . Este passo é importante, pois os modelos estocásticos de mortalidade deste trabalho possuem parâmetros variantes no tempo. Isto significa que é preciso modelar o comportamento futuro destes parâmetros para, posteriormente, realizar previsões das taxas de mortalidade.

No modelo de Lee-Carter pretende-se modelar e prever k_t . No APC, k_t e γ_{t-x} . E, no CBD, $k_t^{(1)}$ e $k_t^{(2)}$. A modelização e previsão dos termos variantes no tempo será levada a cabo, tendo em conta três diferentes abordagens. Na primeira, os processos $k_t^{(i)}$ e γ_{t-x} são considerados univariados e estimados através da metodologia ARIMA - *autoregressive integrated moving average*. Na segunda abordagem, admite-se que $k_t^{(i)}$ é um passeio aleatório, mas γ_{t-x} continua a ser estimado como um ARIMA. Por último, e apenas para a modelização dos termos variantes no tempo do modelo CBD, considera-se a estimação multivariada para $k_t^{(1)}$ e $k_t^{(2)}$.

6.1. Séries Temporais Univariadas: ARIMA

Os modelos ARIMA são capazes de modelar uma ampla gama de séries temporais estacionárias. Entende-se por estacionário (de segunda ordem), um processo que tenha média constante, variância constante e em que a covariância entre t e $t + h$ dependa somente de h (da distância) e não do tempo t .

Um processo y_t diz-se um ARIMA(p,d,q) se:

$$(25) \quad \phi_p(L)\Delta^d y_t = c + \theta_q(L)u_t$$

Em que:

p é a ordem do processo para a representação autoregressiva (AR);

d corresponde o número de vezes que y_t precisa ser diferenciado para tornar-se estacionária;

q é a ordem do processo para a representação em média móvel (MA);

$\phi_p(L)$ é a equação do polinómio característico da representação AR;

$\theta_q(L)$ é a equação do polinómio característico da representação MA.

Por forma a assegurar as propriedades de estacionariedade do processo, as raízes de $\phi_p(L)$ devem estar fora do círculo unitário. De igual modo, as raízes de $\theta_q(L)$ também devem estar fora do círculo unitário para garantir a invertibilidade do processo, isto é, que a informação mais atrasada não tenha mais peso na previsão.

Para a identificação do modelo ARIMA que melhor se ajusta aos dados foi utilizada a metodologia de Box-Jenkins (1976), sendo consideradas as seguintes etapas. Ver também Wei (2006):

i) Estacionarização da série⁸: Nesta etapa é analisado o gráfico da série, seu correlograma e realizados testes de estacionariedade a fim de verificar se a mesma é estacionária em média. Caso a série não seja estacionária em média, são aplicadas as primeiras diferenças.

ii) Identificação de modelos possíveis: São analisados o correlograma das séries estacionárias e identificados possíveis modelos, a partir do decaimento da função de autocorrelação (FAC) e autocorrelação parcial (FACP). O decaimento da FAC fornece informação para a identificação da ordem do termo MA e a FACP para a ordem do termo AR.

iii) Obtenção dos parâmetros: Os modelos devem ser estimados e analisada a significância dos parâmetros.

⁸ Não foi feita qualquer estabilização da série em termos de estacionariedade em variância para que a transformação não impacte os exercícios de previsão e simulação que serão abordados ao longo do estudo.

iv) Análise das raízes do polinómio característico AR/MA: Deve-se verificar se as raízes do polinómio característico de MA e/ou AR estão fora do círculo unitário para satisfazer as propriedades de invertibilidade e estacionariedade.

v) Diagnóstico dos resíduos: Deve-se analisar se os resíduos estão autocorrelacionados através do teste de autocorrelação proposto por Ljung and Box (1978).

O teste pode ser formalizado como:

$$(26) \quad \begin{cases} H_0: \rho_1 = \rho_2 = \dots = \rho_p = 0 \\ H_1: \exists \rho_j \neq 0 \end{cases}$$

E a estatística de teste é:

$$(27) \quad Q^* = T(T+2) \frac{\sum_{j=1}^p r_j^2}{T-j} \sim \chi_p \text{ sob } H_0$$

vi) Seleção dos modelos através da estatística de critério de informação: Os modelos devem ser escolhidos de forma que minimizem a estatística *Akaike information criterion* (AIC), medida comumente utilizada para avaliar o bom ajuste e a parcimónia entre modelos.

vii) Análise do erro de previsão: A última etapa de escolha dos modelos deve avaliar o erro de previsão para o período de teste (20% das observações). O modelo escolhido é aquele que apresentar menor erro de previsão (RMSE).

Os processos $k_t^{(i)}$ e $\gamma_{t-x}^{(3)}$ dos modelos LC, APC e CBD foram submetidos às etapas de i) a vii). Como esperado, as séries em nível não são estacionárias, mas, após aplicar a primeira diferença, os testes ADF já rejeitam a hipótese de não estacionariedade a 10%. Na fase de identificação dos modelos candidatos, o correlograma das séries apontou uma gama de modelos possíveis, que foram estimados e submetidos aos testes de diagnóstico. Após a estimação de diversos modelos, análise da significância geral, das raízes do polinómio característico AR/MA, da autocorrelação dos resíduos, da análise da estatística AIC e do RMSE, foram selecionados os modelos apresentados na Tabela 2.

TABELA 2 - MODELOS ARIMA SELECIONADOS

LC		APC		CBD	
k_t	k_t	γ_{t-x}	k_t^1	k_t^2	

6.2. Passeios aleatórios

Alinhado aos principais estudos de mortalidade e, dada a não estacionariedade de $k_t^{(i)}$, em nível, alternativamente também foram levados em conta modelos em que $k_t^{(i)}$ segue um passeio aleatório com *drift*. Um passeio aleatório com *drift* pode ser representado como:

$$(28) \quad y_t = \alpha + y_{t-1} + \varepsilon_t$$

Em que, ε_t é um ruído branco e os parâmetros são estimados através do pacote StMoMo por mínimos quadrados ordinários.

6.3. Séries temporais multivariadas: Modelos VAR e VECM

Os modelos multivariados surgem com a proposta de estimar séries conjuntamente, sugerindo que uma variável possa conter informação relevante para explicar a outra. Nesta seção são enunciados modelos multivariados para explicar o comportamento conjunto de $k_t^{(1)}$ e $k_t^{(2)}$ do modelo CBD. Chan *et al* (2014), demonstraram a importância de considerar estes índices conjuntamente e que a associação dos mesmos tem um impacto significativo no risco de longevidade do portfolio. O nível geral de mortalidade avaliado é representado por $k_t^{(1)}$. Enquanto que $k_t^{(2)}$ expressa as diferenças em melhorias da mortalidade em torno dos diferentes grupos de idade.

No cenário de pagamento de rendas, o risco de longevidade é agravado com a melhoria da mortalidade geral (aumento de $k_t^{(1)}$) e com a concentração de grande parte dessa melhoria em indivíduos mais velhos (queda de $k_t^{(2)}$). Grande parte dos estudos usa um passeio aleatório bivariado simples para modelar $k_t^{(1)}$ e $k_t^{(2)}$. No entanto, Chan *et al* (2014) afirmaram que uma fraqueza do passeio aleatório bivariado é que ele não captura correlações cruzadas, logo, não captura, por exemplo, a associação entre a mudança num índice de mortalidade CBD durante o ano atual e a mudança noutro índice de mortalidade CBD num ano anterior. Chan *et al* (2014) demonstraram empiricamente que a correlação cruzada entre mudanças nos dois índices de mortalidade CBD pode ser significativa.

Nesta parte do trabalho são introduzidos os modelos *Vector Autoregressive* (VAR) e os *Vector Error Correction Models* (VECM), bem como as análises realizadas para a escolha do modelo a ser considerado na previsão das taxas de mortalidade. Ver Lütkepohl (1991).

Um modelo VAR(p) pode ser expresso como:

$$(29) \quad y_t = v + A_1 y_{t-1} + \dots + A_p y_{t-p} + u_t, t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Em que $y_t = (y_{1t}, \dots, y_{Kt})'$ é um vetor aleatório ($K \times 1$), A_i são matrizes de coeficientes fixos ($K \times K$), $v = (v_1, \dots, v_K)'$ é um vetor de interceptos fixos e $u_t = (u_{1t}, \dots, u_{Kt})'$ é um ruído branco ou processo de inovação K-dimensional, isto é $E(u_t) = 0$, $E(u_t u_t') = \Sigma_u$ e $E(u_t u_s') = 0$ para $s \neq t$.

Os modelos VAR requerem a estacionariedade do processo y_t , que na prática pode ser verificada através da seguinte condição:

$$(30) \quad \det(I_K - A_1 z) \neq 0, \text{ para } |z| \leq 1$$

Essa condição exige que a estimação do modelo VAR, para o caso do processo k_t do modelo CBD utilize as séries em diferenças, nomeadamente $\Delta k_t^{(1)}$ e $\Delta k_t^{(2)}$, já que em nível elas não são estacionárias, como verificado na seção dos modelos ARIMA. Entretanto, se as séries em nível e não estacionárias, são cointegradas, a abordagem VAR resulta num modelo mal especificado, devendo-se recorrer aos modelos de correção de erros (VECM).

Um processo y_t é dito cointegrado se:

1. y_t é integrado de ordem 1, $y_t \sim I(1)$, ou seja, Δy_t é estacionário e estável mas y_t não é estacionário e estável.
2. Existem r , $r = 1, \dots, K - 1$ vetores não nulos linearmente independentes $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_K)'$ tais que:

$$(31) \quad z_t = \beta y_t' = \beta_1 y_{1t} + \beta_2 y_{2t} + \dots + \beta_K y_{Kt} \sim I(0)$$

β é a matriz de cointegração ou a matriz de vetores de cointegração e r é o número de relações de cointegração.

Ao contrário do modelo VAR, num modelo de correção de erro, as mudanças numa variável dependem dos desvios relativamente a uma relação de equilíbrio. Abaixo, a representação do modelo VECM:

$$(32) \quad \Delta y_t = \Pi y_{t-1} + \sum_{j=1}^{p-1} \Gamma_j \Delta y_{t-j} + u_t$$

Em que,

$\Pi = \alpha\beta'$ com rank r e, sendo, α uma matriz $K \times r$ conhecida como matriz de cargas, na qual α_i mede a velocidade do ajustamento da i -ésima variável para o equilíbrio, e β é uma matriz $K \times r$ conhecida como matriz dos vetores de cointegração;

$u_t = (u_{1t}, \dots, u_{Kt})'$ é um ruído branco;

Γ_j é uma matriz $K \times K$ que contém os parâmetros de curto prazo, isto é, os coeficientes dos regressores em primeira diferença.

Tendo em conta estes conceitos, foi analisado e selecionado, conforme a seguir, o melhor modelo multivariado para estimar $k_t^{(1)}$ e $k_t^{(2)}$ conjuntamente. Como ponto de partida, é interessante observar o relacionamento gráfico de $k_t^{(1)}$ e $k_t^{(2)}$, representada na Figura 4.

Apesar das variações de $k_t^{(2)}$ serem muito sutis (vide escala da Figura 4), o gráfico não parece sugerir a cointegração das séries. Para confirmar as suspeitas, foi realizado o teste de cointegração de Johansen, que procura a característica⁹ da matriz Π , uma vez que é esse número que vai determinar o número de vetores de cointegração linearmente independentes. O teste indicou a existência de um vetor de cointegração, ao nível de 5%. Neste sentido, seria adequada a estimação do VECM. Contudo, estimado o VECM, o teste da significância do ajustamento para o equilíbrio ($H_0: \alpha = 0$ vs $H_1: \alpha < 0$) não encontrou provas estatísticas, ao nível de 5%, de mecanismo de correção de erros.

⁹ A característica de uma matriz é igual ao número de valores próprios não nulos dessa matriz.

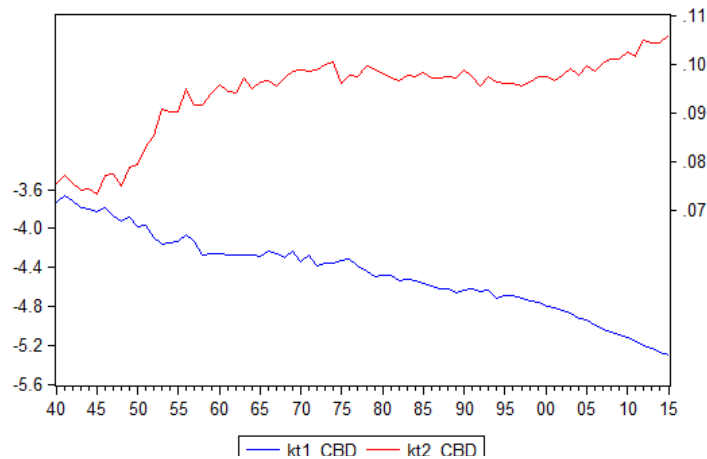


FIGURA 4 - ANÁLISE DE $k_t^{(1)}$ E $k_t^{(2)}$ NO PERÍODO DE 1940 A 2015

Como a relação de cointegração não é informativa para o modelo então, o VAR, sobre $\Delta k_t^{(1)}$ e $\Delta k_t^{(2)}$, torna-se uma melhor opção neste caso.

Através de uma análise partindo de modelos gerais para específicos, incluindo testes de diagnósticos dos resíduos, o lag 5 foi considerado o mais adequado e, portanto, foi estimado o VAR(5) sobre $\Delta k_t^{(1)}$ e $\Delta k_t^{(2)}$.

7. ANÁLISE DOS RESULTADOS: COMPARAÇÕES E DISCUSSÃO

O presente estudo propôs-se modelar a mortalidade da população portuguesa através dos modelos LC, APC e CBD. Para tal, usaram-se dados da *Human Mortality Database*.

Em termos de estimação dos parâmetros, nota-se que o padrão de mortalidade variante no tempo representado pelo índice $k_t^{(1)}$ decresce no tempo para os três modelos. Isto significa que, há uma melhoria da mortalidade geral ao longo do tempo. Essa tendência acaba por ser naturalmente observada mais fortemente, no longo prazo, devido às melhorias das condições de vida da população, ao desenvolvimento tecnológico e da medicina, entre muitos outros fatores.

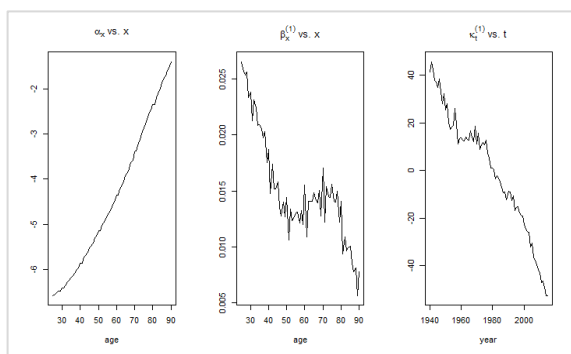


FIGURA 5 - PARÂMETROS ESTIMADOS NO
MODELO LC

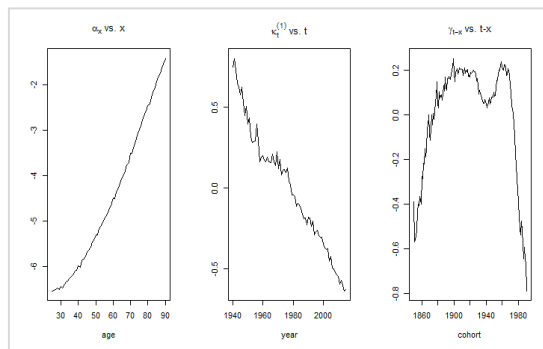


FIGURA 6 - PARÂMETROS ESTIMADOS NO
MODELO APC

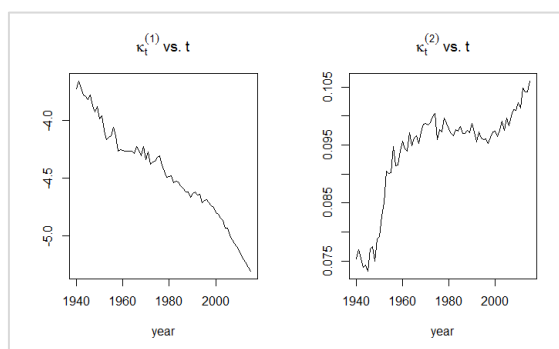


FIGURA 7 - PARÂMETROS ESTIMADOS NO MODELO CBD

Por outro lado, analisando o parâmetro α_x presente nos modelos LC e APC, verifica-se o inverso. Neste caso, há uma tendência crescente do parâmetro que reflete o efeito sobre a mortalidade ao longo das idades. Novamente, os resultados mostram-se coerentes com a literatura atuarial.

No modelo de LC, observa-se ainda a tendência decrescente de β_x . Sendo este a resposta do logaritmo da taxa de mortalidade face à mudanças em $k_t^{(1)}$, faz sentido que este efeito diminua ao longo das idades analisadas. Como descrito acima, o nível de mortalidade tem uma tendência decrescente ao longo dos anos e, de igual modo, esse efeito reflete-se no comportamento da mortalidade a cada idade observada no tempo.

O modelo APC possui uma componente diferente dos outros dois modelos. O efeito de coorte, que reflete o comportamento da mortalidade ao longo do tempo tendo em conta a geração de nascimento. Observa-se no gráfico referente ao efeito de coorte na Figura 6 que a mortalidade tem sido decrescente nos últimos anos, principalmente após 1960. Isto

pode ser reflexo de medidas implementadas por políticas de saúde no sistema português. Consistente com a análise descritiva das taxas de mortalidade, nota-se que a geração de nascidos mais recentemente parece beneficiar mais das melhorias de mortalidade face às gerações passadas. Quanto ao efeito de coorte entre 1860 e 1900, este deve-se essencialmente ao efeito de observação dos dados.

Relativamente ao termo $k_t^{(2)}$ do modelo CBD, que representa a inclinação da curva de mortalidade do logit transformada, um aumento do mesmo significa que a mortalidade nas idades mais jovens (na escala logit), melhora mais rapidamente que nas idades mais superiores. E, como observado na Figura 7, esse fenómeno tem sido crescente ao longo dos anos.

No tocante à bondade do ajustamento dos modelos (Tabela 3), uma análise das estatísticas AIC, BIC e Loglik revela que o acréscimo da variável de coorte traz consigo informação capaz de dar melhor ajuste aos dados. Importa referir que as diferenças entre os modelos apresentados na Tabela 3 também têm a ver com o fato de modelarem quantidades diferentes.

TABELA 3 - ANÁLISE DA BONDADDE DO AJUSTAMENTO ATRAVÉS DE CRITÉRIOS DE SELEÇÃO

	AIC	BIC	Loglik
LC	87.553,29	88.896,49	-43.570,65
APC	86.077,93	87.903,64	-42.758.96
CBD	258.696,28	259.687,37	-129.196,10

Os gráficos da Figura 8 corroboram os resultados apontados pelos critérios de informação. Nota-se a presença de maior variabilidade das taxas de mortalidade ajustadas pelo modelo CBD comparativamente às taxas observadas, em especial nos mais jovens e nas idades mais avançadas. Importa referir também que o modelo sobrestima as taxas de mortalidade dos idosos de 65 anos, mas subestima-as nas idades mais avançadas e dos mais jovens.

Apesar do modelo APC ter exibido melhor ajuste aos dados, todos os modelos foram submetidos à estimação e previsão, sendo realizadas as devidas análises e comparações entre eles. É importante mencionar também que, apesar das comparações feitas entre os modelos, o modelo CBD estima uma variável diferente dos modelos LC e APC.

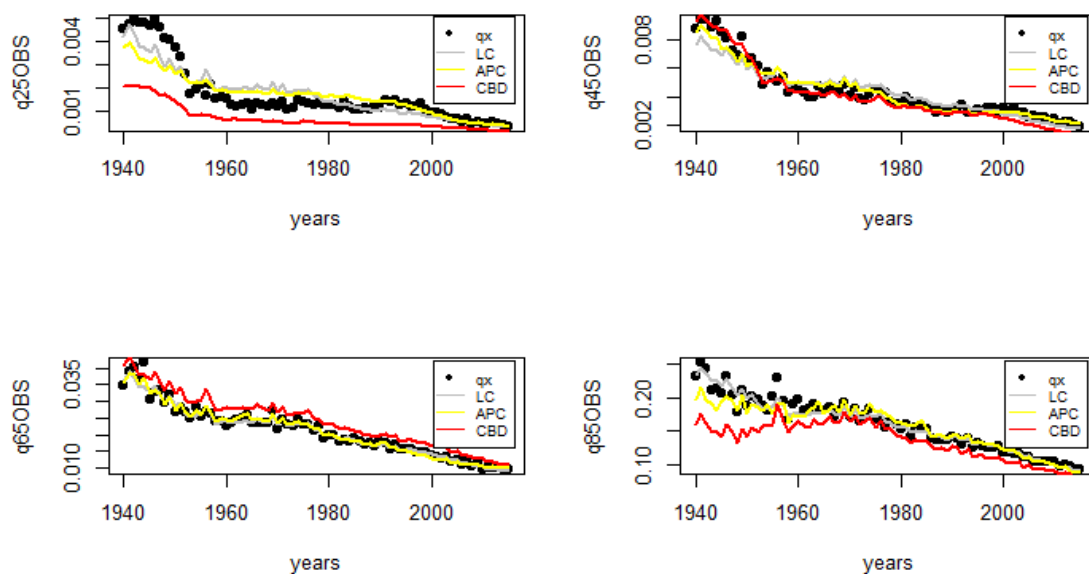


FIGURA 8 - COMPARAÇÃO ENTRE AS TAXAS DE MORTALIDADE OBSERVADAS E MODELIZADAS

Após estimados os parâmetros dos modelos LC, APC e CBD, tendo em conta a mortalidade observada da população portuguesa, para as idades de 25 a 90 anos, no período de 1940 a 2015, foram também realizadas previsões (2016-2135) dos parâmetros variantes no tempo, a partir dos modelos apresentados na Tabela 4. O objetivo de modelar e prever os parâmetros variantes no tempo centra-se em conhecer o comportamento futuro desses parâmetros, para que sejam introduzidos no modelo de previsão das taxas de mortalidade. Portanto, conhecer o comportamento futuro desses parâmetros permite que seja possível realizar previsões das taxas de mortalidade.

TABELA 4 - MODELOS ESTIMADOS PARA CADA COMPONENTE VARIANTE NO TEMPO

LC		APC		CBD	
k_t	k_t	γ_{t-x}	$k_t^{(1)}$	$k_t^{(2)}$	$\Delta k_t^{(1)}, \Delta k_t^{(2)}$
ARIMA(5,1,0)	ARIMA(0,1,5)	ARIMA(5,1,10)	ARIMA(5,1,1)	ARIMA(8,1,0)	
Passeio Aleatório	Passeio Aleatório	Passeio Aleatório	Passeio Aleatório Bivariado		VAR(5)

Primeiramente analisou-se a previsão *in-sample* (2000-2015), não tendo sido encontrada grande diferença de performance entre os modelos neste quesito (Tabela 5).

TABELA 5 - ANÁLISE DOS ERROS DE PREVISÃO (RMSE) DAS TAXAS DE MORTALIDADE POR MODELO PARA A AMOSTRA IN-SAMPLE (2000-2015)

Modelo	RMSE
LC Passeio Aleatório	0,758%
LC ARIMA (5,1,0)	0,756%
APC Passeio Aleatório	0,397%
APC ARIMA (5,1,10)	0,413%
CBD Passeio Aleatório	0,652%
CBD ARIMA	0,648%
CBD VAR(5)	0,663%

De seguida, analisou-se a previsão *out-of sample* (2016-2135), ilustrada na Figura 9.

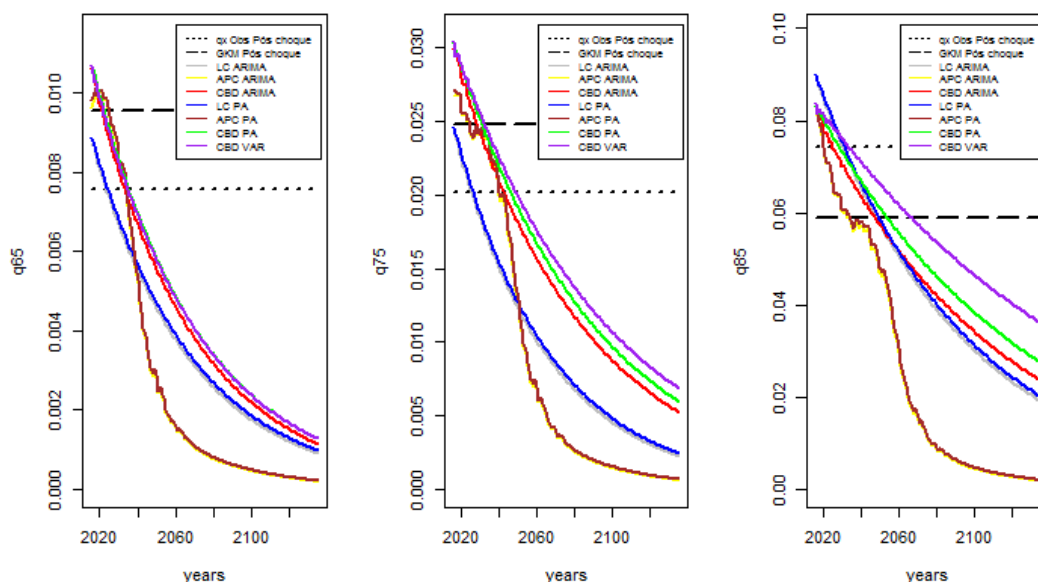


FIGURA 9 - COMPARAÇÃO DAS PREVISÕES DA TAXA DE MORTALIDADE

Para os primeiros anos de previsão, os pressupostos definidos no capítulo 3 para o cálculo do requisito de capital pela abordagem padrão (média de q_x observado nos últimos 2 anos e 45,49% da tábua GKM-80), após o choque de diminuição de 20%, mostram-se abaixo dos modelizados. No entanto, em horizontes de tempo mais alargados, o pressuposto de mortalidade estática ao longo do tempo, considerado na abordagem padrão, parece sobrestimar as taxas de mortalidade, o que leva a uma redução considerável do valor das responsabilidades com rendas.

Em seguida, com a mortalidade futura já projetada, foi implementada a extrapolação de Kannisto para captar as taxas de mortalidade dos 91 aos 120 anos, em virtude dos dados observados não serem tão precisos nesse intervalo de idades. Por ser do tipo logística, a extrapolação de Kannisto considera um aumento gradual das taxas de mortalidade para um nível assintótico. Essa abordagem acaba por ser diferente da adotada para a mortalidade seguindo a tábua GKM-80, que considera taxas iguais a 1 a partir da última idade desta tábua (de 117 anos em diante).

A Figura 10 mostra as taxas de mortalidade extrapoladas dos dados observados e dos modelos estocásticos para o ano de 2015 com o intuito de se verificar o decaimento da mortalidade utilizando a extrapolação de Kannisto. Essas taxas de 2015 são utilizadas no cálculo da BE, tendo em conta que as anuidades utilizadas no cálculo são antecipadas.

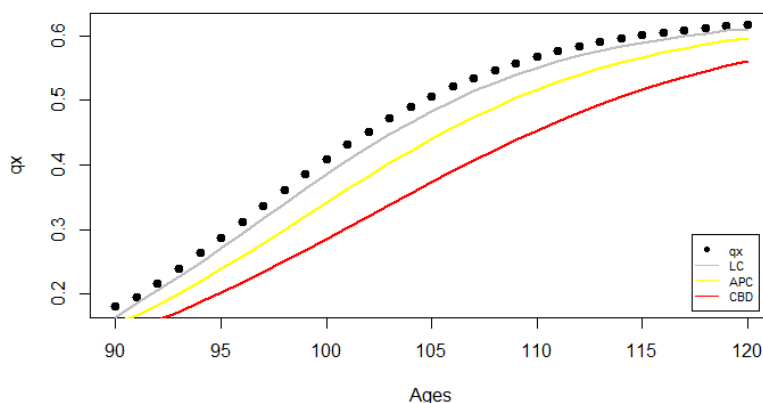


FIGURA 10 - COMPARAÇÃO DAS TAXAS DE MORTALIDADE EXTRAPOLADAS EM 2015

No passo seguinte, foi considerado um portfolio hipotético de rendas vitalícias (vide anexo) para calcular a melhor estimativa das provisões técnicas (BE). Após o cálculo da BE, realizou-se um exercício de simulação para gerar uma distribuição de perdas e determinar o requisito de capital para o risco de longevidade (SCR) pelo VaR 99,5%.

No caso dos valores de SCR mensurados através da fórmula padrão (FP Qx Observ e FP GKM-80 45,49%, no gráfico da Figura 11), não há exercício de simulação. Neste caso, o SCR é a diferença entre a melhor estimativa pós choque e a avaliada no cenário base, como descrito na equação 13, do capítulo 3.

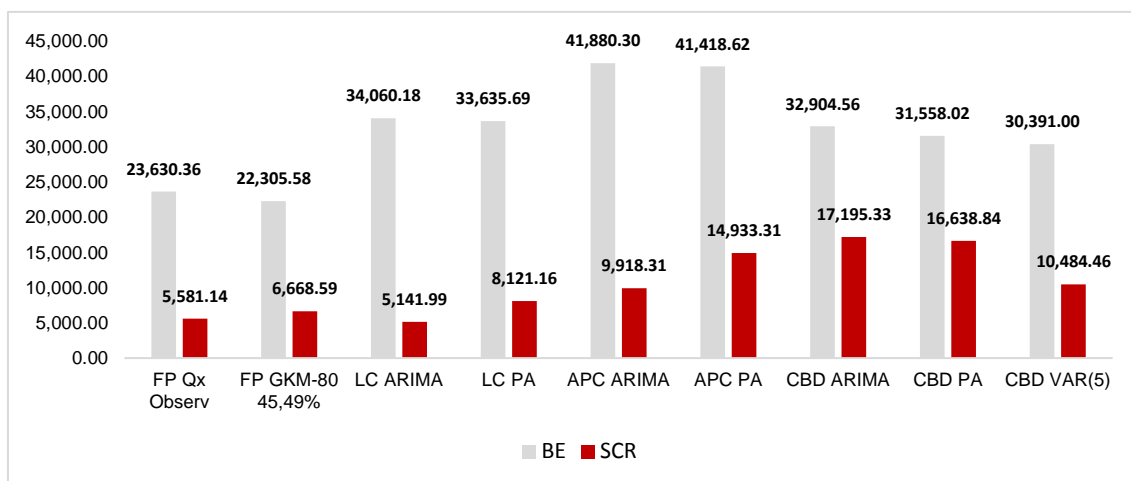


FIGURA 11 - COMPARAÇÃO DA BE E SCR PARA O RISCO DE LONGEVIDADE

Os resultados apurados para a melhor estimativa das provisões técnicas, nos cenários da mortalidade modelizada por LC, APC e CBD, indicam que as responsabilidades auferidas, considerando taxas de mortalidade estáticas ao longo do tempo (média da mortalidade observada a 2014-2015 ou 45,49% da GKM-80) são subestimadas.

Por outro lado, quando comparados os resultados entre os modelos dinâmicos, observa-se que, a melhor estimativa das provisões técnicas, modeladas por CBD, com recurso ao VAR(5), são mais baixas que as modelizadas pelos outros modelos. Isto demonstra o ganho, em termos de previsão, de considerar a correlação entre os índices de tempo, $k_t^{(1)}$ e $k_t^{(2)}$, através da estimação conjunta. Na figura 9, verifica-se o nível das taxas de mortalidade previstas, deste modelo, com relação aos outros dois modelos CBD, que impacta o valor da BE.

O modelo APC, que havia apresentado bons resultados em termos de ajuste aos dados observados, previu taxas de mortalidades mais baixas, com atenção para uma queda acentuada nas previsões dentre 2040 e 2060, sugerindo, portanto, que a inclusão do parâmetro de coorte tem um custo para as previsões *out-of-sample*, refletindo-se em maiores responsabilidades de seguros.

Em termos de requisito de capital do risco de longevidade, os montantes apurados através da fórmula padrão, no geral, foram inferiores aos modelos alternativos. Não obstante, também foi apurado um requisito de capital relativamente pequeno para o modelo LC ARIMA, indicando que modelos internos podem inclusive trazer contributos

a nível de fundos próprios para as empresas de seguros. Além disso, este modelo também apresentou bons resultados de ajuste aos dados observados.

Note-se que a variabilidade dos resultados obtidos para os diferentes modelos pode também dever-se à pequena dimensão da carteira hipotética (vide anexo).

8. CONCLUSÕES

Este trabalho revelou a importância de estudar a longevidade, tendo em conta metodologias mais robustas. As seguradoras portuguesas ainda não têm considerado os modelos internos para reportar seus riscos e, em certas carteiras, isso pode levar a uma má-estimação da quantificação dos seus riscos.

Na tentativa de modelizar a mortalidade através de modelos dinâmicos que reflitam essa melhoria na longevidade ao longo do tempo, o presente estudo, ajustou três modelos estocásticos aos dados da população portuguesa de 1940 a 2015.

A partir desses modelos, calculou-se a melhor estimativa das provisões técnicas e o requisito de capital para o risco de longevidade para um portfolio hipotético de rendas. As melhores estimativas das provisões calculadas sob a abordagem padrão do Solvência II mostraram-se inferiores às calculadas com modelos de mortalidade dinâmicos, uma vez que o cálculo pela fórmula padrão considera tábuas de mortalidade estáticas, o que sobrestima a mortalidade futura e subestimam as responsabilidades de seguros do portfolio considerado.

No desempenho geral dos modelos, apesar do modelo APC ter apresentado melhores resultados em termos de ajuste, a inclusão de mais um parâmetro, nomeadamente o efeito de corte, pode comprometer a acurácia das previsões da mortalidade. O modelo LC acabou por ser superior aos demais, devido à sua simplicidade, aos bons resultados de ajuste e previsões e, como um fator atrativo para as companhias de seguros, revela que o uso de modelos internos, podem resultar em requisitos de capital mais realistas e, até mesmo, inferiores aos calculados pela abordagem padrão, o que se traduz em ganhos a nível dos fundos próprios.

Comparativamente aos diversos estudos de mortalidade, este trabalho trouxe características singulares face aos demais, ao reunir num mesmo estudo a preocupação

com a estimação e a previsão dos parâmetros. No caso da previsão, levou-se em conta a dependência temporal dos parâmetros para identificar possíveis estruturas de modelos de previsão mais adequados e quantificar o risco de forma mais acurada. Diferentemente, de grande parte dos *papers* de mortalidade, o presente estudo não se limitou a consideração de um simples passeio aleatório. Com relação ao ARIMA, o padrão identificado para os modelos APC e CBD tinha ordens muito superiores, o que pode comprometer a fiabilidade desses modelos. Neste caso, eles não são a melhor opção.

Há ainda temas dentro da modelação da longevidade que sensibilizam os montantes de provisões técnicas e SCR, que ainda podem ser explorados. Um deles é a extrapolação. Além da extrapolação de Kannisto, há outras formas funcionais conhecidas e que podem ajustar-se bem às caudas para determinadas populações.

Outro importante ponto a destacar é que os requisitos de capital de solvência calculados com modelos de mortalidade estocástica foram obtidos através de simulação. Esta técnica poderia gerar resultados diferentes se utilizada uma metodologia de simulação diferente ou mesmo outra ferramenta computacional.

Vale a pena ressaltar também que a experiência de mortalidade das carteiras de seguros varia face aos dados da população e do portfolio considerado. E, nesse caso, devem gerar outros resultados e interpretações. Como sugestões para investigações futuras, destacam-se a consideração de dados de portfolios reais de empresas portuguesas a fim de estimar de forma mais precisa a mortalidade, as responsabilidades de seguros e o requisito de capital, tendo em conta grupos homogêneos, como o tipo de produto, o perfil dos segurados, sexo entre outros. A variabilidade dos resultados obtidos para os diferentes modelos neste trabalho também deve estar associada à pequena dimensão da carteira considerada.

Relativamente às possíveis melhorias para o pacote *StMoMo* utilizado, importa referir a implementação de modelos multivariados para a estimação dos parâmetros variantes no tempo, a estimação dos modelos para as taxas de mortalidade (variável fracionária) por máxima verossimilhança robusta e a implementação de modelos que capturem a heterogeneidade individual.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ASF (2015). *Seguros do Ramo Vida* [Em linha]. Disponível em: https://www.asf.com.pt/NR/rdonlyres/AF85F6E6-10B4-4368-A713-399F4929A009/0/ASF_Brochura_Vida_2015.pdf [Acesso em 2018/09/25]
- Bowers, L.B., Gerber, H.U., Hickman, J.C., Jones, D.A. & Nesbitt, C.H. (1997). *Actuarial Mathematics*, 2ª Ed. Schaumburg: The Society of Actuaries.
- Box, G.E.P. & Jenkins, G.M. (1976). *Time series analysis: forecasting and control*. 2ª Ed. San Francisco: Holden-Day Press.
- Brouhns, N., Denuit, M. & Vermunt, J. (2002). A Poisson Log-Bilinear Regression Approach to the Construction of Projected Lifetables. *Insurance: Mathematics and Economics*, 31(3), 373–393.
- Cairns, A.J.G., Blake, D., & Dowd, K. (2006). A two-factor model for stochastic mortality with parameter uncertainty: Theory and calibration. *Journal of Risk and Insurance*, 73, 687-718.
- Cairns, A.J.G., Blake, D., Dowd, K., Coughlan, G.D., Epstein, D., Ong, A., & Balevich, I. (2009) A quantitative comparison of stochastic mortality models using data from England and Wales and the United States. *North American Actuarial Journal*, 13, 1-35.
- Chan, W.S., Li, J.S.H. & Li, J. (2014). The CBD Mortality Indexes: Modeling and Applications. *North American Actuarial Journal* 18, 38-58.
- Coelho, E. & Nunes, L. (2015). Evolução da Mortalidade em Portugal desde 1950. *Revista Estudos Demográficos* 55, 5-40, INE, I.P. Lisboa.
- Currie, I.D., Durban, M. and Eilers, P.H.C. (2004). Smoothing and forecasting mortality rates. *Statistical Modelling* 4, 279-298.

- Currie, I.D. (2006). *Smoothing and Forecasting Mortality Rates with P-Splines* [Em linha]. Disponível em: <https://www.actuaries.org.uk/documents/smoothing-and-forecastingmortality-rates-p-splines-handouts> [Acesso em: 2018/10/01].
- Currie, I.D. (2016). On Fitting Generalized Linear and non-linear Models of Mortality. *Scandinavian Actuarial Journal*, (4), 356–383.
- De Moivre, A. (1725). *Annuities on Lives*, see H. & S. London, 3–125.
- Dickson, D., Hardy, M. & Waters, H. (2009). *Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks*. New York: Cambridge University Press.
- Diretiva 1979/267/CEE do Conselho de 5 de Março de 1979, relativa à coordenação das disposições legislativas, regulamentares e administrativas, respeitantes ao acesso à atividade de seguro direto de vida e ao seu exercício.
- Diretiva 2009/138/CE do Parlamento Europeu e do Conselho de 25 de novembro de 2009, relativa ao acesso à atividade de seguros e resseguros e ao seu exercício.
- EIOPA (2015). *Risk Free Interest Rate Term Structures* [Base de Dados], dezembro 2015. Frankfurt: EIOPA. Disponível em: <https://eiopa.europa.eu/Pages/Supervision/Insurance/Risk-Free-Interest-Rate-Term-Structures---Previous-Releases.aspx>.
- EIOPA (2017). *Consultation Paper on EIOPA's second set of advice to the European Commission on specific items in the Solvency II Delegated Regulation* [Em linha]. Disponível em: https://eiopa.europa.eu/Publications/Consultations/EIOPA-CP-17-006_Consultation_Paper_on_Second_set_of_Advice_on_SII_DR_Review.pdf [Acesso em: 2018/10/07].
- Fuchs, V. R. (2010). New Priorities for Future Biomedical Innovations. *N Engl J Med*, 363, 704-706.
- Gompertz, B. (1825), On the nature of the function expressive of the law of human mortality etc., *Phil. Trans. Roy. Soc.* 115, 513-585.

- Heligman, L. and J.H. Pollard (1980), The age pattern of mortality, *Journal of the Institute of Actuaries* 107, 49-80.
- Human Mortality Database (2015). *Human Mortality Database* [Base de Dados]. Berkeley: University of California, and Rostock: Max Planck Institute for Demographic Research. Disponível em: <https://www.mortality.org>.
- Kannisto, V. (1992), Presentation at a workshop on old age mortality at Odense University, June 1992.
- Lichtenberg, F.R. (2017). The impact of biomedical innovation on longevity and health. *Nordic Journal of Health Economics* 5 (1), 45-57.
- Jordan, Jr. (1991). *Society Actuaries' Textbook on Life Contingencies*, 2^a Ed. Chicago: The Society of Actuaries.
- Lee R.D., Carter L.R. (1992). Modeling and Forecasting U.S. Mortality. *Journal of the American Statistical Association*, 87(419), 659–671.
- Ljung, G. M. and Box, G. E. P. (1978) On a measure of lack of fit in time series models. *Biometrika* 65, 297–303.
- Lütkepohl, H. (1991). *Introduction to multiple time series analysis*. Berlin: Springer-Verlag.
- Makeham, W.M. (1860), On the law of mortality and the construction of annuity tables. *Journal of the Institute of Actuaries* 8, 301-310.
- Millossovich, P., Villegas, A.M. & Kaishev, V. K. (2018). StMoMo: An R Package for Stochastic Mortality Modelling. *Journal of Statistical Software* 84(3), doi: 10.18637/jss.v084.i03.
- Mortality Table and Other Rate Tables (1980). *GKM_80* [Base de Dados], Switzerland: Bertrand Cleuvenot. Disponível em: <https://mort.soa.org/>.
- Osmond, C. (1985). Using age, period and cohort models to estimate future mortality rates. *International Journal of Epidemiology* 14, 124–129.

- Kannisto, V. (1992). Presentation at a workshop on old age mortality at Odense University, June 1992
- Regulamento Delegado 2015/35 da Comissão de 10 de outubro de 2014 que completa a Diretiva 2009/138/CE do Parlamento Europeu e do Conselho de 25 de novembro de 2009, relativa ao acesso à atividade de seguros e resseguros e ao seu exercício.
- Renshaw A, Haberman S (2006). A Cohort-Based Extension to the Lee-Carter Model for Mortality Reduction Factors. *Insurance: Mathematics and Economics*, 38(3), 556–570.
- Renshaw A, Haberman S (2011). A comparative study of parametric mortality projection models. *Insurance: Mathematics and Economics*, 48(1), 35–55.
- Triple A Risk Finance Poland (2015). *R in Insurance* [Em linha]. Disponível em: http://rstudio-pubs-static.s3.amazonaws.com/108914_cae8eb68343f48ce98a0906f8417699b.html#89 [Acesso em: 2018/10/02].
- Victoria Seguros de Vida, SA (2017). Relatório sobre a Solvência e a Situação Financeira (SFCR) [Em linha]. Disponível em: [http://www.victoria-seguros.pt/resources/CMS1B183F713E569CF08025828A003413FF/\\$file/SFCR_VICTORIAVida_2017.pdf](http://www.victoria-seguros.pt/resources/CMS1B183F713E569CF08025828A003413FF/$file/SFCR_VICTORIAVida_2017.pdf) [Acesso em: 2018/10/15].
- William W. Wei (2006). *Time Series Analysis: Univariate and Multivariate Methods*, 2a Ed. Boston: Pearson Education.
- Willekens, F. & Schervov, S. (1991). *Age-Period-Cohort (APC) Analysis of Mortality with Applications to Soviet Data* [Em linha]. Disponível em: <http://pure.iiasa.ac.at/id/eprint/3523/1/WP-91-042.pdf> [Acesso em: 2018/10/05].

ANEXOS

Anexo A: Portfolio hipotético para rendas de 1000 EUR pagas anualmente

(disponível em http://rstudio-pubs-static.s3.amazonaws.com/108914_cae8eb68343f48ce98a0906f8417699b.html#89)

YoB	Premium
1989	199.53
1959	15
1987	186.3
1973	172.1
1987	205.87
1962	178.43
1982	254.2
1964	301.46
1987	208.23

Anexo B: Código para simulação do requisito de capital de solvência

Os códigos utilizados neste trabalho foram adaptados do caso de estudo disponível em http://rstudio-pubs-static.s3.amazonaws.com/108914_cae8eb68343f48ce98a0906f8417699b.html#89

```
#SCR do LC com kt seguindo um arima
LCSim <- simulate(LCfit, nsim = nsim, h = forecastTime, kt.method = "iarima", kt.order=c(5,1,0))
collectBEL <- array(NA, c(200,1))
for (s in 1:nsim){
  prem_s <- 0
  ben_s <- 0
  qx <- cbind(LCSim$fitted[, , s], LCSim$rates[, , s])
  extrapolate <- kannistoExtrapolation(qx, ages.fit, years_chart)
  for (i in 1:nrow(portfolio)){
    ben_s <- ben_s+DFcashflow(extrapolate$qxt, ageStart = portfolio$age[i], omegaAge = 120,
    pensionAge = 66, valyear = valyear,
    ir = Riskfree_Dez15, type = "annuity")*pension
    prem_s <- prem_s+DFcashflow(extrapolate$qxt, ageStart = portfolio$age[i],
    omegaAge = 120, pensionAge = 66, valyear = valyear,
    ir = Riskfree_Dez15, type = "premium")*portfolio$Premium[i]
  }
  collectBEL[s, 1] <- round(ben_s - prem_s, 2)
}
selectBEL <- quantile(collectBEL, probs = 0.995, type = 1)
SCR_LCarima <- round(as.numeric(selectBEL) - BEL_LC[1,1], 2)
```